高考数学复习点拨：浅析求圆锥曲线离心率策略（二）

构建关于 a，c 的齐次等式求解 e．

根据题设条件，借助 a,b,c 之间的关系，构造 a,c 的关系（特别是齐二次式），进而得到关于 $\frac{c}{a}$ 即 e 的方程，从而解得.

例 3 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(0<a<b)$ 的半焦距为 c，直线 L 过 $(a,0),(0,b)$ 两点. 已知原点到直线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{4}c$，则双曲线的离心率为（　　　）

A. 2　　　　B. $\sqrt{3}$　　　　C. $\sqrt{2}$　　　　D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

【解析】：由已知，直线 L 的方程为 $bx+ay-ab=0$，

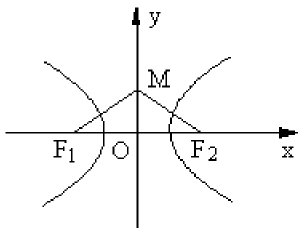
由点到直线的距离公式，得 $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\sqrt{3}}{4}c$, 又 $c^2=a^2+b^2$, $\therefore 4ab=\sqrt{3}c^2$

两边平方，得 $16a^2(c^2-a^2)=3c^4$. 两边同除以 a^4，并整理，得 $3e^4-16e^2+16=0$，

解得 $e^2=4$ 或 $e^2=\frac{4}{3}$, 又 $0<a<b$, $\therefore e^2=1+\frac{b^2}{a^2}>2$, $\therefore e^2=4$, $\therefore e=2$. 故选 A.

【变式训练 1】 双曲线虚轴的一个端点为 M，两个焦点为 F_1,F_2，$\angle F_1MF_2=120^\circ$，则双曲线的离心率为（　　）

A. $\sqrt{3}$　　　　B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$　　　　C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$　　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$



图

【解析】：如图所示，不妨设 $M(0,b), F_1(-c,0), F_2(c,0)$,

则 $|MF_1|=|MF_2|=\sqrt{c^2+b^2}$, 又 $|F_1F_2|=2c$,

在 ΔF_1MF_2 中，由余弦定理，得

$$\cos\angle F_1MF_2=\frac{|MF_1|^2+|MF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|MF_1|\cdot|MF_2|},$$

即 $-\frac{1}{2}=\frac{\left(c^{2}+b^{2}\right)+\left(c^{2}+b^{2}\right)-4c^{2}}{2\sqrt{\left(c^{2}+b^{2}\right)}\cdot\sqrt{\left(c^{2}+b^{2}\right)}}$，$\therefore \frac{b^{2}-c^{2}}{b^{2}+c^{2}}=-\frac{1}{2}$，又 $c^{2}=a^{2}+b^{2}$，

$\therefore e^{2}=\frac{3}{2}, e=\frac{\sqrt{6}}{2}$. 故选 B.